بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الكميات العددية والمتجهة scalars and vectors

إذا تحرك جسم من موضع مثل P إلى موضع R, قد يسلك طريق مستقيم (أقصر الطرق).

الإزاحة Displacement: أقصر مسار لحركة الجسم بين موضعين. ولها مقدار وإتجاه.

الكمية المتجهة Vector: كمية لها مقدار وإتجاه. القوة, السرعة، التعجيل، شدة المجال الكهربائي.

الكميات العددية Scalar: كمية تعين بمقدارها فقط. الحجم، درجة الحرارة، الزمن، الكتلة.

المتجهات Vectors

المتجه الذي طوله وحدة واحدة يسمى بوحدة المتجه unit vector.

$$\vec{A} = \hat{u}\left|\vec{A}\right| \qquad (1.1)$$

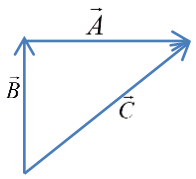
يتساوى المتجهان إذا كان لهما نفس المقدار والأتجاه.

إذا تساويا في المقدار وتعاكسا في الأتجاه يكون

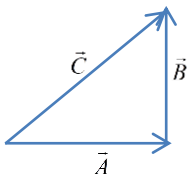
$$\vec{B} = -\vec{A} \qquad (2.1)$$

1-1 جمع المتجهات Vector addition

$$\vec{C} = \vec{B} + \vec{A} \qquad (3.1)$$

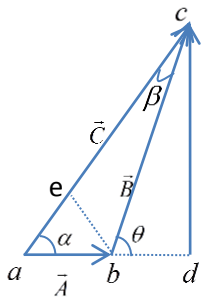


$$\vec{C} = \vec{A} + \vec{B} \qquad (4.1)$$



شكل 1.1

لحساب $\vec{C}$



$$ad = ab + bd$$

$$ad = A + B\cos\theta$$

$$dc = B\sin\theta$$

$$C^2 = (A + B\cos\theta)^2 + (B\sin\theta)^2$$

$$C = (A^2 + B^2 + 2AB\cos\theta)^{1/2} \qquad (6.1)$$

حيث θ تمثل الزاوية بين المتجهين $\vec{A}$ و $\vec{B}$.

المعادلة (6-1) هي قانون الجيب تمام.

لمعرفة إتجاه المحصلة $\vec{C}$ علينا إيجاد مقدار الزاوية α .

من المثلث acd : $cd = ac\sin\alpha$

من المثلث bdc : $cd = bc\sin\theta$.

$C\sin\alpha = B\sin\theta$ أو $\dfrac{C}{\sin\theta} = \dfrac{B}{\sin\alpha}$

كذلك :

$be = A\sin\alpha = B\sin\beta$ أو $\dfrac{A}{\sin\beta} = \dfrac{B}{\sin\alpha}$

$$\frac{C}{\sin\theta} = \frac{B}{\sin\alpha} = \frac{A}{\sin\beta} \qquad (7.1)$$

المعادلة (1.7) هي قانون الجيب.

كحالة خاصة عندما يكون $\vec{B}$ عمودي على $\vec{A}$ ، أي إن θ تساوي 90 درجة.

$$C^2 = (A^2 + B^2) \qquad (8.1)$$

$$\tan\alpha = \frac{B}{A}$$

إن حاصل طرح المتجه $\vec{B}$ من $\vec{A}$ يمثله $\vec{A}-\vec{B}$ وهو المتجه $\vec{D}=\vec{A}-\vec{B}$ الذي إذا أضيف الى $\vec{B}$ ينتج $\vec{A}$. كما يلي

$$\vec{A}-\vec{B}=\vec{A}+(-\vec{B})$$

إذا كان $\vec{A}=\vec{B}$ فإن $\vec{A}-\vec{B}=0$ والصفر متجه مقداره صفر و إتجاهه غير معروف.

الفرق بين المتجهات لا يخضع لقانون التبادل.

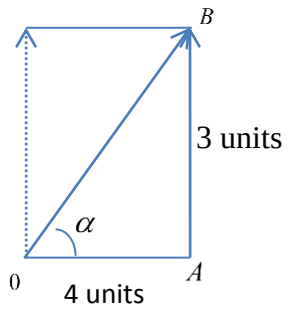
$$D=[A^2+B^2+2AB\cos(\pi-\theta)]^{1/2}$$

أو

$$D=[A^2+B^2-2AB\cos\theta]^{1/2} \qquad (9.1)$$

مثال:

متجهان مقدار الأول 4 وحدات والثاني 3 وحدات يلتقيان في النقطة 0. جد محصلتهما بالرسم والحساب إذا كانت الزاوية بينهما أ) 90 درجة، ب) 60 درجة.



$$OB^2 = OA^2 + AB^2$$

$$OB^2 = 4^2 + 3^2 = 25$$

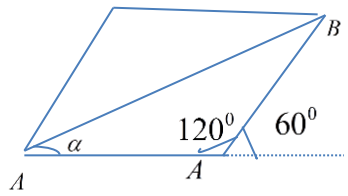
OB=5 units

بحسب الأتجاه

$$\tan\ \alpha = \tfrac{AB}{OA} = \frac{3}{4} = 0.75$$

$$\alpha = 37^0$$

ب)



$$OB^2 = OA^2 + AB^2 + 2(OA)(AB)\cos 60$$

OB=6.1 units

لحساب الزاوية نستخدم قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{AB} = \frac{\sin 120}{OB}$$

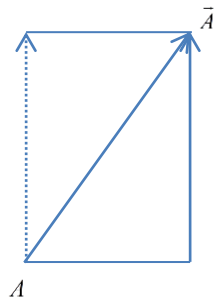
$$\frac{\sin\alpha}{3} = \frac{\sin 120}{6.1} = \frac{0.866}{6.1}$$

$$\sin\alpha = 0.43$$

$$\alpha = 25^0$$

تحليل المتجهات

نحلل المتجه إلى متجهين متعامدين كخطوة أولى.



$$\vec{A} = \hat{i}A_x + \hat{j}A_y \qquad (10.1)$$

ومن الشكل نفسه نجد

$$A_x = A\cos\gamma \qquad (11.1)$$

$$A_y = A\sin\gamma \qquad (12.1)$$

بالتربيع والجمع

$$A^2 = A_x^2 + A_y^2 \qquad (13.1)$$

$$A = \sqrt{A_x^2 + A_y^2} \qquad (14.1)$$

$$\tan\gamma = \frac{A_y}{A_x} \qquad (14.1)$$

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الفصل الثاني : الحركة

أنواع الحركة

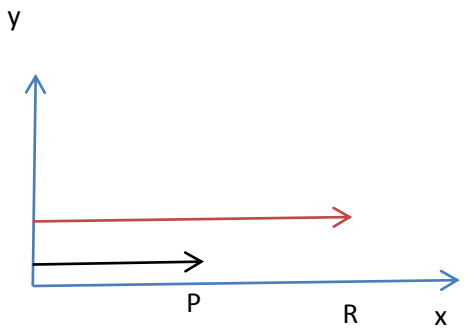
إنتقالية، دورانية، إهتزازية. أنواع الحركة تختلف حسب المحاور المرجعية.

الجسيم: جسم متناهي الصغر بدون أبعاد يعامل كنقطة هندسية (فكرة نظرية).

الحركة الإنتقالية

معدل السرعة Average Velocity:

تغير الإزاحة في وحدة الزمن.



من تعريف معدل السرعة يكون

$$\bar{\vec{V}} = \frac{\vec{x}_2 - \vec{x}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} \qquad (2.1)$$

معدل الأنطلاق Average Speed: معدل المسافة المقطوعة في وحدة الزمن.

مثلا معدل الإنطلاق بين النقطتين PوR على خط منحن يكون أكبر من معدل الأنطلاق على خط مستقيم إذا قطعا المساران بنفس الفترة الزمنية.

إن معدل الأنطلاق بين نقطتين على خط مستقيم يمثل **معدل السرعة**.

السرعة الآنية Instantaneous Velocity : سرعة الجسيم في أي نقطة من مساره في أي وقت من أوقات الحركة.

$$\vec{V} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t} = \frac{d\vec{x}}{dt} \qquad (2.2)$$

السرعة الانية كمية متجهه مقدارها $|\vec{V}|$ يساوي الإنطلاق.

التعجيل Acceleration: تغير السرعة في وحدة الزمن.

الحركة على خط مستقيم بإتجاه واحد يتغير مقدارها فقط فينتج عنه التعجيل.

إذا زادت (أو نقصت) السرعة بمقدار ثابت يكون التعجيل منتظماً. إذا كانت السرعة ثابتة المقدار والأتجاه يكون التعجيل صفر **(الحركة المنتظمة)**.

معدل التعجيل Average Acceleration:

$$\bar{\vec{a}} = \frac{\vec{V}_2 - \vec{V}_1}{t_2 - t_1} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} \qquad (2.3)$$

التعجيل الآني Instantaneous Acceleration:

تعجيل جسم في أي نقطة في أي وقت

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \to 0} = \frac{\Delta \vec{V}}{\Delta t} = \frac{d\vec{V}}{dt} \qquad (2.4)$$

الحركة المنتظمة التعجيل على خط مستقيم

Rectilinear Motion with Constant Acceleration

إذا كان التعجيل منتظماً فمعدل التعجيل يساوي التعجيل الآني أي إن:

$$a = \frac{dV}{dt} \qquad (2.5)$$

بالتكامل

$$a\int dt = \int dV \qquad (2.6)$$

$$V = at + c_1 \qquad (2.7)$$

حيث c_1 هو ثابت التكامل توجد قيمته من الشروط الإبتدائية للسرعة والموقع.

إذا كانت V_0 هي السرعة عند الزمن صفر $(t = 0)$

$$V_0 = c_1$$

$$V = at + V_0 \qquad (2.8)$$

ولما كانت $V = \frac{dx}{dt}$

$$\frac{dx}{dt} = V_0 + at \qquad (2.9)$$

بالتكامل ينتج

$$\int dx = \int (V_0 + at)\ dt$$

$$\int dx = \int V_0 dt + \int atdt$$

$$x = V_0 t + \frac{1}{2}at^2 + c_2 \qquad (2.10)$$

إذا إبتدأت الحركة من نقطة الأصل $(x = 0)$ عند الزمن $(t = 0)$ يكون $c_2 = 0$ يكون

$$x = V_0 t + \frac{1}{2}at^2 \qquad (2.11)$$

من العلاقة $a = \frac{dV}{dt}$

$$a = \frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dx}\frac{dx}{dt} = \frac{dx}{dt}\frac{dV}{dx} = V\frac{dV}{dx}$$

$$a = V\frac{dV}{dx}$$

$$\int VdV = \int adx$$

$$\frac{1}{2}V^2 = ax + c_3$$

من الشروط الإبتدائية السابقة عند $(x = 0)$ يكون $V = V_0$ فيكون

$$\frac{1}{2}{V_0}^2 = c_3$$

أي إن

$$V^2 = {V_0}^2 + 2ax \qquad (2.12)$$

مثال: يتحرك جسيم على طول المحور x بحيث يعطى موقعه عند أية لحظة بالصيغة $x = 5t^2 + 1$ حيث x مقاسة بالأمتار و t بالثوان. إحسب معدل السرعة في الفترة الزمنية من 2 إلى 2.001 ثانية. إحسب السرعة الآنية في الثانية الثانية

$$\Delta t = 0.001\sec$$

$$x = 5t^2 + 1 = 5(2.001)^2 + 1 = 21.020005m$$

$$x = 5t^2 + 1 = 5(2)^2 + 1 = 21m$$

$$\Delta x = 0.020005m$$

$$V_{ave} = \overline{V} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{0.020005m}{0.001\sec} = 20.005m.\sec^{-1}$$

$$V = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(5t^2 + 1) = 10t$$

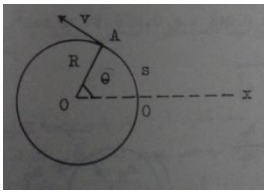
السرعة الآنية في الثانية الثانية

$$V = 20m.\sec^{-1}$$

الحركة الدائرية Circular Motion

هي نوع خاص من الحركة على منحن. مسار الحركة هنا دائري وسرعة الجسم v المماسة للمسار تكون تكون دائماً عمودية على نصف قطر الدائرة R. كما في الشكل. نلاحظ جسم يقطع مسافة S على محيط الدائرة فإذا كانت الزاوية التي مسحها بين النقطتين هي θ يكون

$$s = R\theta$$



ولما كانت R ثابتة يكون مقدار السرعة

$$V = \frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt} \qquad (2-13)$$

والكمية

$$w = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2-14)$$

وتسمى بالسرعة الزاوية وهي معدل التغير الزمني للزاوية θ . وتقاس بالزوايا النصف قطرية Radiance/sec.

$$V = wR \qquad (2-14)$$

هناك حالة خاصة تكون فيها w ثابتة حيث تتحول الحركة الدائرية إلى حركة دورية periodic motion أي إن الجسم يمر في اية نقطة من نقاط الدائرة بفترات زمنية منتظمة. يسمى الزمن اللازم لدورة كاملة بزمن الدورة T وتسمى عدد الدورات في وحدة الزمن بالتردد f. فمثلا إذا صنع جسم n دورة بزمن مقداره t فزمن الدورة يكون $T = \frac{t}{n}$ والتردد $f = \frac{n}{t}$ اذن

$$f = \frac{1}{T} \qquad (2.15)$$

وحدة التردد هي هيرتز Hertz وتختصر (Hz) أي

$$1Hz = \sec^{-1}$$

بتكامل المعادلة (2.14)

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} wdt$$

فإذا كانت w ثابتة

$$\theta = \theta_0 + w(t - t_0) \qquad (2.16)$$

وعند إعتبار $t_0 = 0$ عند $\theta_0 = 0$ (الشروط الأبتدائية) يكون

$$\theta = wt \qquad (2.17)$$

ولدورة كاملة

$$w = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f \qquad (2.18)$$

الحركة الدائرية والتعجيل الزاوي

يعرف تغير السرعة لجسيم مع زمن بالتعجيل الزاوي

$$\alpha = \frac{dw}{dt} \qquad (2.19)$$

ولما كانت الحركة تجري في مستوي فيكون إتجاه α هو نفس إتجاه w الذي هو ثابت.

$$\alpha = \frac{dw}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2} \qquad (2.20)$$

بتكامل المعادلة

$$\int_{w_0}^{w} dw = \int_{t_0}^{t} \alpha dt$$

وعندما تكون α ثابتة

$$w = w_0 + \alpha(t - t_0) \qquad (2.21)$$

وعندما تكون $\theta_0 = 0$ عند $t_0 = 0$ نحصل على

$$w = \frac{d\theta}{dt} \qquad (2.22)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = w_0 + \alpha(t - t_0) \qquad (2.23)$$

$$\int_{\theta_0}^{\theta} d\theta = \int_{t_0}^{t} w_0 dt + \alpha \int_{t_0}^{t} (t - t_0) dt \qquad (2.24)$$

$$\theta = \theta_0 + w_0(t - t_0) + \frac{1}{2}\alpha(t - t_0)^2 \qquad (2.25)$$

بِسۡمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحۡمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الفصل الثالث : القوة

القوة: مؤثر يغير حالة الجسم من السكون إلى الحركة أوبالعكس.

توازن الجسيم Particle Equilibrium

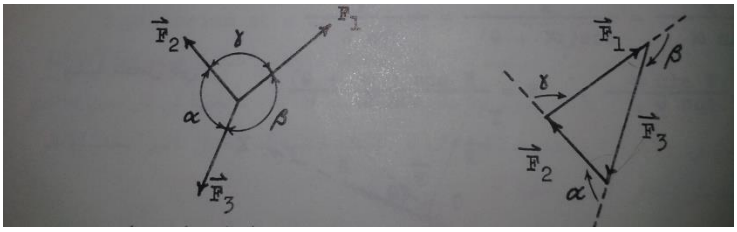
$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad (3.1)$$

إذا كان المجموع الأتجاهي للقوى المسلطة على جسيم صفرا" يقال إنه متوازن فإذا كان ساكنا سمي التوازن ستاتيكي (مستقر) وإذا كان متحركا بسرعة منتظمة فالتوازن ديناميكي (حركي).

تكتب المعادلة (3.1) بالشكل

$$\sum_i F_{ix} = 0,\ \sum_i F_{iy} = 0,\ \sum_i F_{iz} = 0 \qquad (3.2)$$

مثال: ناقش توازن ثلاث قوى تؤثر على الجسيم



الشكل يبين ثلاثة قوى $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \vec{F}_3$. إذا كان الجسيم في حالة توازن أي

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = 0 \qquad (3.3)$$

فإن القوى الثلاثة تقع في مستوى واحد. برسم مضلع القوى نحصل على الشكل أدناه

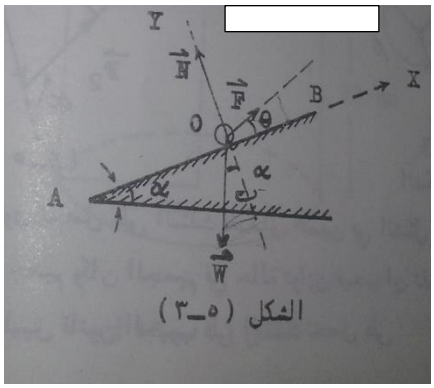
وبتطبيق قانون الجيب

$$\frac{F_1}{\sin\alpha} = \frac{F_2}{\sin\beta} = \frac{F_3}{\sin\gamma} \qquad (3.4)$$

حيث γ الزاوية بين $\vec{F}_1, \vec{F}_2$ و α الزاوية $\vec{F}_2, \vec{F}_3$ و β الزاوية بين $\vec{F}_1, \vec{F}_3$. تسمى العلاقة أعلاه نظرية لامي Lami's theorem.

مثال: ناقش توازن جسيم على سطح مائل أملس.

الشكل أدناه سطح مائل أملس AB يتأثر بقوة وزنه $\vec{W}$ ، قوة السحب $\vec{F}$ ورد الفعل $\vec{N}$ العمودية على السطح. زاوية ميل السطح α والزاوية التي تصنعها القوة $\vec{F}$ مع السطح المائل هي θ.



الشكل (٥ـ٣)

بإستخدام قانون الجيب:

$$\frac{F}{\sin(180-\alpha)}=\frac{N}{\sin(90+\alpha+\theta)}=\frac{W}{\sin(90-\theta)}$$

$$\frac{F}{\sin\alpha}=\frac{N}{\cos(\alpha+\theta)}=\frac{W}{\cos\theta}$$

$$F=\frac{W\sin\alpha}{\cos\theta},\qquad N=\frac{W\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}$$

الطريقة الثانية هي رسم محورين مثل X,Y كما في الشكل ونستخدم المعادلة (3.4)

$$\sum_i F_{ix}=F\cos\theta-W\sin\alpha=0$$

$$\sum_i F_{iy}=F\sin\theta-W\cos\alpha+N=0$$

من المعادلة الأولى نحصل على

$$F=\frac{W\sin\alpha}{\cos\theta}$$

وهي نفس نتيجة الطريقة الأولى. لأيجاد N نعوض قيمة F في المعادلة الثانية

$$
\begin{aligned}
N &= W\cos\alpha - F\sin\theta \\
&= W\cos\alpha - \frac{W\sin\alpha}{\cos\theta}\sin\theta \\
&= \frac{W\cos\alpha}{\cos\theta}\cos\theta - \frac{W\sin\alpha}{\cos\theta}\sin\theta \\
&= \frac{W\cos(\alpha+\theta)}{\cos\theta}
\end{aligned}
$$

توازن الجسم الصلد

محصلة القوى المؤثرة على الجسم الصلد يجب ان تساوي صفراً لكي يكون الجسم في حالة توازن للحركة الآنتقالية أي إن

$$\sum_i \vec{F}_i = 0 \qquad (3.5)$$

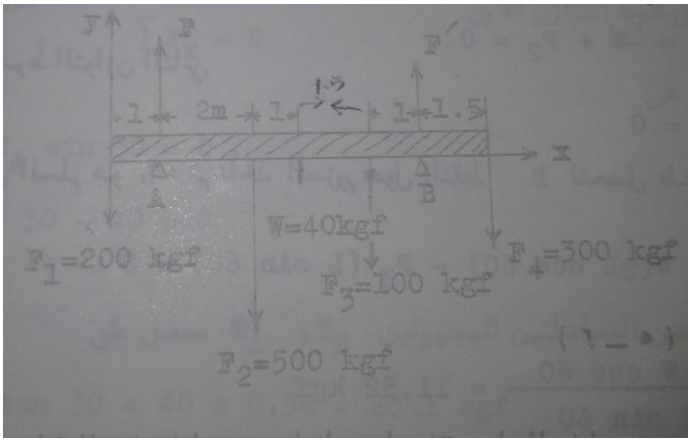
وإن محصلة العزوم عليه تساوي صفر لأي جسم يكون في حالة حركة إنتقالية

$$\sum_i \vec{M}_i = 0 \qquad (3.6)$$

إذا وقعت جميع القوى في مستوى واحد يكون شرطا التوازن

$$\sum_i F_{ix} = 0,\ \sum_i F_{iy} = 0, \sum_i \vec{M}_i = 0 \qquad (3.7)$$

مثال: قضيب طوله 8 متر ووزنه 40كغم-قوة . وقد توازن على النقطتين A, B تحت تأثير القوى المبينة في الشكل.جد القوتين المؤثرتين على القضيب في النقطتين A, B.



الحل: بتطبيق التوازن الأول

$$\sum \vec{F} = 0$$

$$\sum \vec{F} = F + F' - 200 - 500 - 40 - 100 - 300 = 0$$

$$\sum \vec{F} = F + F' = 1140 kg.f$$

ثانياً: بتطبيق الشرط الثاني

$$\sum \vec{M} = 0$$

للحركة الدورانية. بأخذ العزوم حول محور يمر بالنقطة A بحيث تكون محصلة العزوم صفراً

$$\sum M = (-200)(-1) + (F)(0) + (-500)(2) + (-40)(3) + (-100)(4.5) + (F')(5.5) + (-300)(7) = 0$$

فيكون

$$F' = 132.7 kg.f$$
$$F = 1007.3 kg.f$$

<u>قانون نيوتن الأول</u>

(كل جسم يستمر في حالة السكون إن كان ساكناً والحركة على خط مستقيم بإنطلاق ثابت إن كان متحركاً مالم تؤثر عليه قوة خارجية فتغير حالته الحركية).

أهم نتائج هذا القانون شرطا التوازن.

<u>قانون نيوتن الثالث</u>

يصعب وجود قوة منفردة في الطبيعة فالقوة مظهر للتأثير المتبادل بين جسمين

(لكل فعل رد فعل مساوي له في المقدار ومعاكس له في الإتجاه).

<u>قانون نيوتن الثاني</u>

القوة هي السبب الذي يسبب التعجيل.

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (3.8)$$

حيث $\vec{F}$ هي المجموع الإتجاهي لجميع القوى المسلطة و $\vec{a}$ تعجيل الجسم، m كتلته.

ويكون هناك ثلاثة معادلات تربط مركبات محصلة القوة F_x, F_y, F_z بمركبات التعجيل a_x, a_y, a_z.

$$\begin{aligned} F_x &= ma_x \\ F_y &= ma_y \\ F_z &= ma_z \end{aligned} \qquad (3.9)$$

إن الكتلة كمية عددية فعند ربط جسمان يسلكان سلوكاً ميكانيكيا كجسم واحد كتلته مجموعها $(m_1 + m_2)$.

<u>الزخم الخطي</u>

$$\vec{p} = m\vec{V} \qquad (3.10)$$

وهو كمية إتجاهية تتجه بإتجاه السرعة. وهو فكرة فيزيائية مهمة لأنه يمزج عنصرا السرعة والكتلة لوصف الحالة الديناميكية للجسم. وحداته $Kg.\frac{m}{s}$.

يمكن التعبير عن القانونان الأول والثالث بدلالة الزخم:

القانون الأول: يتحرك الجسيم الحر دائماً بزخم ثابت.

القانون الثالث: معدل تغير الزخم لجسم يساوي محصلة القوى المؤثرة عليه.

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (3.11)$$

فعندما تكون $\vec{F} = 0$ يكون الزخم ثابت وهو نص القانون الأول. إذا كانت كتلة الجسم ثابتة مع الزمن

$$\begin{aligned} \vec{F} &= \frac{d}{dt}(m\vec{V}) \qquad (3.12) \\ &= m\frac{d\vec{V}}{dt} \\ &= m\vec{a} \end{aligned}$$

أما إذا كانت الكتلة متغيرة مع الزمن فلا تصح المعادلة (3.8)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V})$$
$$= m\frac{d\vec{V}}{dt} + \vec{V}\frac{dm}{dt}$$
$$= m\vec{a} + \vec{V}\frac{dm}{dt} \qquad (3.13)$$

والتي تعود ايضا إلى قانون نيوتن الثاني عندما تكون الكتلة ثابتة.

أنظمة الوحدات الميكانيكية: وحدات القوة والكتلة

وحدات الكتلة بنظام MKS بالكيلوغرام Kg. وحدات القوة نيوتن Newton وهي القوة التي تؤثر على جسم كتلته كيلوغرام فتكسبه تعجيل قدره $1m/\sec^2$.

في نظام CGS تسمى بالداين dyne.

$$\vec{F}(N) = m(Kg)\times\vec{a}(m.s^{-2})$$
$$\vec{F}(dyne) = m(gm)\times\vec{a}(cm.s^{-2})$$
$$1N = 10^5 dyne$$

وزن الجسم:

قوة الجذب الأرضي المسلطة عليه. فالوزن كمية متجهة للأسفل.

إذا كان الوزن هو $\vec{W}$ والتعجيل الأرضي $\vec{g}$ يكون

$$\vec{W} = m\vec{g} \qquad (3.14)$$

وعند إستخدام القيم المطلقة لطرفي المعادلة

$$W = mg \qquad (3.15)$$

حيث W مقدار الوزن و g تعجيله و m كتلته.

لما كانت جميع الأجسام تسقط بنفس التعجيل الأرضي في محل معين على الأرض فالنسبة بين وزني جسمين كنسبة كتلتيهما.

يتغير التعجيل الأرضي من نقطة إلى أخرى على سطح الأرض بينما تبقى كتلتيهما ثابتة.

مثال: الشكل المجاور فيه كتلتين m_1, m_2 مربوطتين بخيط يمر على بكرة خفيفة ملساء. إفرض إن m_2 أكبر من m_1 وإن الكتلتين إطلقتا من السكون جد الشد في الخيط وتعجيل المجموعة (يسمى هذا التركيب بماكنة أتوود Atwood's Machine).

الحل:

إفرض التعجيل للأعلى موجب وللأسفل سالب. وإن تعجيل m_1 هو a فيكون تعجيل m_2 هو $-a$. الشكل يبين القوى المؤثرة على m_1, m_2.

نطبق قانون نيوتن الثاني:

$$T - m_1 g = m_1 a$$
$$T - m_2 g = -m_2 a$$

بحذف T من المعادلتين

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1} g$$

أما إذا حذفنا a بينهما

$$T = \frac{2m_2 m_1}{m_2 + m_1} g$$

فإذا كانت $m_1 = 1kg$ و $m_2 = 2kg$

$$a = \frac{g}{3} = 3.26ms^{-2}$$

$$T = \frac{4}{3} g = 13.04N$$

ولذا فإن قيمة الشد تكون وسطا بين وزني الكتلتين (وزن m_1 $9.8N$ و m_2 $19.6N$).

قانون حفظ الزخم الخطي Low of conservation of linear momentum

لنأخذ حالة مثالية لجسمين يتفاعلان تبادلياً معزولين عن العالم. سرعهما في اللحظة t هي $\vec{V}_1,\vec{V}_2$ وفي اللحظة اللاحقة t' هي $\vec{V}_1',\vec{V}_2'$ وكتلهما m_1,m_2

$$\vec{p}=\vec{p}_1+\vec{p}_2=m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2 \qquad (3.16)$$

في اللحظة t'

$$\vec{p}'=\vec{p}_1'+\vec{p}_2'=m_1\vec{V}_1'+m_2\vec{V}_2' \qquad (3.17)$$

على فرض إن الكتل ثابتة. إن زخمي المجموعة $\vec{p}$ و $\vec{p}'$ متساويين مهما كانت قيم t و t'.

$$m_1\vec{V}_1+m_2\vec{V}_2=m_1\vec{V}_1'+m_2\vec{V}_2' \qquad (3.18)$$

هذه النتيجة تدعى بقانون حفظ الزخم (الزخم الكلي لمنظومة معزولة من الجسيمات ثابتاً).

ولعدم ملاحظة أي شذوذ لهذه القاعدة فقد إستخدمها الفيزياويين كثيرا في إكتشاف جسيمات غير معروفة عند ملاحظة أي شذوذ ظاهري كما في إكتشاف النيوترون والنيوترينو والفوتون وعدد كبير من الجسيمات الأولية.

مثال: بندقية كتلتها $0.8kg$ تطلق قذيفة كتلتها $0.016kg$ بسرعة $700ms^{-1}$. إحسب سرعة إرتداد البندقية.

الحل: إذا كانت كتلة الرصاصة m وسرعتها $\vec{v}$ وكتلة البندقية M وسرعة إرتدادها $\vec{V}$ عندئذ

$$0=m\vec{v}+(M-m)\vec{V}$$

$$\vec{V}=-\frac{m}{M-m}\vec{v}$$

وحيث إن $m<<M$

$$\vec{V}=-\frac{m}{M}\vec{v}$$

ويكون

$$\left|\vec{V}\right|=\left|-\frac{m}{M}\vec{v}\right|$$

$$V=\frac{m}{M}v=\frac{0.016\times 700}{0.80}=14ms^{-1}$$

مثال: قذف شخص من سطح الأرض كرة شاقوليا نحو الأعلى ثم مسكها عند عودتها. إفرض إن الكرة والأرض تكون مجموعة من جسمين وناقش المسألة من وجهة نظر الزخم. إهمل مقاومة الهواء.

الحل:

الشخص المرتبط بالأرض جزء منها. يجب أن يبقى زخم المجموعة صفر خلال الحركة

$$0 = m\vec{v} + M\vec{V}$$

$$\vec{V} = -\frac{m}{M}\vec{v}$$

ولما كانت M كبيرة جداً تكون سرعة أرتداد الأرض ضئيلة جداً.

ديناميك الجسم

قوى الإحتكاك

إن أعظم قوة إحتكاك شروعي تساوي أصغر قوة لازمة لبدء الحركة. عند بدء الحركة بين جسمين متماسين تبدأ قوة الأحتكاك بالتناقص بعد الحركة وتصبح أقل من قيمتها عند بدأ الحركة. تسمى القوة اللازمة للحفاظ على حركة نسبية منتظمة بين جسمين بقوة الأحتكاك الأنزلاقي F_k . إذا رمزنا للقوة الضاغطة N ومعامل الأحتكاك الأنزلاقي μ_k

$$F_k = \mu_k N \qquad (3.19)$$

مثال:

يبين الشكل القوى العاملة على الجسم وهي وزنه $\vec{W}$، القوة الضاغطة $\vec{N}$ قوى الإحتكاك $\vec{F}_s$. محصلة القوى التي يسلطها الجسم على السطح $\vec{F}_s + \vec{N}$ لم تعد عمودية على سطح التلامس كما كان حال السطوح الناعمة $\vec{F}_s = 0$. لما كان الجسم في حالة توازن فيجب أن تكون محصلة القوى عليه صفراً

$$\vec{F}_s + \vec{N} + \vec{W} = 0$$

بتحليل القوى إلى مركباتها في الأتجاهين x, y

$$N - W\cos\theta_s = 0$$

$$F_s - W\sin\theta_s = 0$$

بالتعويض عن F_s بالكمية $\mu_s N$ نحصل على

$$N = W\cos\theta_s$$

$$\mu_s N = W\sin\theta_s$$

ومنها

$$\mu_s = \tan\theta_s$$

مثال: تتحرك سيارة نحو اليمين كما في الشكل.إفرض F_k ثابتة والمسافة المطلوبة هي x من معادلات الحركة بتعجيل منتظم

$$v^2 = v_0^2 + 2ax$$

حيث إن السرعة النهائية $v = 0$

$$x = -\frac{v_0^2}{2a}$$

والأشارة السالبة تبين إن التعجيل يتجه نحو اليسار بإتجاه القوة المولدة له F_k . ولتعيينه نطبق قانون نيوتن الثاني

$$-F_k = ma = \frac{W}{g}a$$

$$a = -g(\frac{F_k}{W})$$

ولما كان $N = W$ في هذه الحالة يكون

$$\mu_k = \frac{F_k}{N} = \frac{F_k}{W}$$

أي إن

$$a = -g\mu_k$$

والمسافة المطلوبة

$$x = \frac{v_0^2}{2g\mu_k}$$

وتبين هذه النتيجة انه كلما زادت السرعة الأبتدائية للسيارة v_0 كلما كانت المسافة المقطوعة قبل توقف الحركة أكبر.

لاحظ إن المسافة لمقطوعة تتغير طرديا مع مربع السرعة الأبتدائية وعكسيا مع معامل الأحتكاك الأنزلاقي. لذلك كلما قل μ_k كانت المسافة أكبر. لذا يجب أن يخفض السائق سرعته في المطر لأن معامل الأحتكاك يكون أصغر لكي يستطيع إيقاف السيارة في الحالات الطارئة عند مسافة أصغر.

إفرض إن السرعة الأبتدائية هي $60Km/hr$ ومعامل الأحتكاك الإنزلاقي هو 0.4 تكون المسافة

$$x = \frac{(16.66)^2}{2\times 9.8\times 0.4} = 35.43m$$

القوة الجاذبة نحو المركز

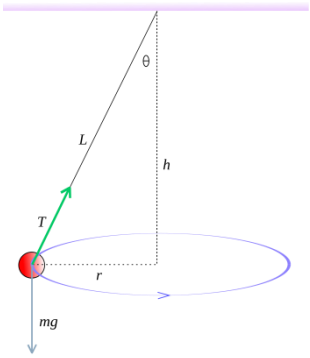
إن الجسيم الذي يتحرك على منحن له تعجيل في كل نقطة من مساره نحو الجانب المقعر من المسار يسمى بالتعجيل العمودي مقداره $(a_N = v^2/\rho)$ وآخر يسمى بالتعجيل المماسي $a_T = \frac{dv}{dt}$ حيث v إنطلاق الجسيم و ρ نصف قطر التكور في تلك النقطة. وما الحركة الدائرية إلا حالة خاصة من الحركة على منحن يكون فيها نصف قطر التكور مساوياً لنصف قطر تكور الدائرة R. وعندما تكون الحركة الدائرية منتظمة يبقى الأنطلاق v ثابتاً والتعجيل المماسي صفراً. أي إن التعجيل الكلي يكون في هذه الحالة متجهاً نحو مركز الدائرة لذا يسمى بالتعجيل المركزي centripetal acceleration ومقداره v^2/R . وتبعاً لقانون نيوتن الثاني يتحتم وجود قوة تولد هذا التعجيل وتتجه بإتجاهه في كل لحظة من لحظات حركة الجسيم ومقدارها F يساوي

$$F = m\frac{v^2}{R} \qquad (3.19)$$

حيث m هي كتلة الجسيم وتسمى هذه القوة بالقوة الجاذبة نحو المركز وهي تعمل بإستمرار على تغيير إتجاه سرعة الجسيم بشكل يجعل التعجيل متجهاً دوماً نحو مركز الدائرة ولا تختلف من حيث المبدأ عن سائر القوى الأخرى. وتتميز فقط بكيفية تأثيرها على الحركة وتسلط من قبل جسم أو مجال خارجي.

إن الجسيم الدائر يسلط قوة على الجسم الخارجي يعاكس القوة الجاذبة المركزية تدعى بالقوة الطاردة عن المركز centrifugal force. ولذا فهما تؤثران على جسمين مختلفين ولا تلغي أحدهما الأخرى. وإذا تلاشت القوة الجاذبة المركزية أثناء دوران الجسم ينطلق حينئذ بالحركة على خط مستقيم بإنطلاق ثابت بإتجاه المماس للدائرة في النقطة التي زال فيها تأثير القوة (على فرض عدم وجود قوى أخرى).

مثال: يبين الشكل جسما صغيرا كتلته m يدور في دائرة أفقية بأنطلاق ثابت v في نهاية خيط طوله L فيرسم سطحا مخروطيا أثناء الدوران. أحسب زمن الدورة الكاملة (يسمى هذا الجهاز بالبندول المخروطي Conical Pendulum).



الحل: لنفرض إن الخيط يصنع زاوية θ مع الشاقول. لذلك يكون نصف قطر المدار هو $r = L\sin\theta$. تؤثر على الجسم قوتان هما وزنه $\vec{W}$ والشد في الخيط $\vec{T}$. عند تحليل $\vec{T}$ إلى مركبة أفقية (شعاعية) $T\sin\theta$ بأتجاه الخيط الواصل بين الجسم m ومركز الدائرة C وأخرى عمودية $T\cos\theta$ يكون

$$T\sin\theta = m\frac{v^2}{R}$$

$$T\cos\theta = mg$$

بقسمة المعادلة الأولى على الثانية

$$\tan\theta = \frac{v^2}{Rg}$$

مدة الدورة الكاملة للجسم

$$P = \frac{2\pi R}{v} = \frac{2\pi R}{\sqrt{Rg\tan\theta}}$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g\tan\theta}}$$

لكن

$$R = L\sin\theta$$

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{L\cos\theta}{g}}$$

هذه العلاقة تربط بين θ, L, P ونلاحظ إن مدة الدورة لا تعتمد على الكتلة m .

لبندول مخروطي طول خيطه متر واحد وزاوية ميله 30^0 مع الشاقول تكون مدة الدورة من المعادلة الأخيرة $1.87\sec$.

مثال: الدوار جهاز يستخدم في مدينة الألعاب وهو غرفة مجوفة تدور حول محورها الشاقولي. يدخل الغرفة شخص ثم يغلق بابها ويقف مستنداً على الجوار ويبدأ الدوار الحركة من السكون بسرعة زاوية تزداد تدريجيا حتى تصل إلى سرعة مفروضة مقدماً حينئذ تفتح أرضية الغرفة من تحت قدمي الشخص وتظهر حفرة عميقة يبقى الشخص ملتصقاً بالجدار الدوار ويدور معه ولا يسقط في الحفرة. إحسب معامل الأحتكاك بين ملابس الشخص وجدار الدوار الذي يكون ضرورياً لمنع السقوط.

هناك قوة العمودية N التي يسلطها الجدار على الشخص وهي التي تزود الشخص بالقوة الجاذبة نحو المركزالضرورية للحفاظ على حركته الدائرية فإذا كان نصف قطر الدوار هو R وv سرعة الشخص النهائية، يكون

$$N = ma = \frac{W}{g}(\frac{v^2}{R})$$

ولأنعدام الحركة في الأتجاه الشاقولي يكون

$$F_s - W = 0$$

$$F_s = W = \mu_s N$$

حيث μ_s هو معامل الأحتكاك الشروعي اللازم لمنع السقوط.

$$\mu_s = \frac{W}{N} = \frac{W}{\frac{W}{g}(\frac{v^2}{R})}$$

$$\mu_s = \frac{gR}{v^2}$$

وهو أصغر معامل إحتكاك ضروري لمنع الأنزلاق. وكما نلاحظ لا يعتمد على وزن الشخص.

إذا كان نصف قطر الدوار $2.1m$ وملابس الشخص تولد إحتكاك مع جدار الدوار معامله 0.4 فتكون مقدار السرعة $7.17m/\sec$ أو حوالي $25.8km/hr$.

الحركة على منحن

إذا كان إتجاه القوة بإتجاه السرعة فالحركة تحدث على خط مستقيم أما إذا كانت محصلة القوى تصنع زاوية مع متجه السرعة فتحدث الحركة على منحن ويكون للتعجيل مركبة عمودية على السرعة (المركبة العمودية a_N) تغير إتجاه الحركة بإستمرار والحركة الدائرية هي حالة خاصة من الحركة على منحن. إذا كانت كتلة الجسم ثابتة تكون القوة موازية للتعجيل كما في الشكل.

عند إستخدام قانون نيوتن الثاني تكون القوة المماسة للمسار

$$F_T = ma_T$$

أو

$$F_T = m\frac{dv}{dt} \qquad (3.20)$$

بينما مركبة القوة العمودية على المسار (القوة الجاذبة نحو المركز)

$$F_N = ma_N$$

$$F_N = m\frac{v^2}{\rho} \qquad (3.21)$$

حيث ρ هو نصف قطر تكور المسار . تتجه هذه القوة دائماً نحو مركز تكور المسار وهي المسؤولة عن تغيير إتجاه السرعة بينما تتجه القوة المماسة بأتجاه مماس المنحني أو عموديا على القوة الجاذبة نحو المركز وهي المسؤولة عن تغيير مقدار السرعة لذا إذا كانت القوة المماسة صفراً يتلاشى التعجيل المماسي وتصبح الحركة دائرية منتظمة. إذا كانت القوة المركزية صفراً يتلاشى التعجيل العمودي (المركزي) وتحدث الحركة على خط مستقيم. في الحركة الدائرية يكون ρ مساوياً لنصف قطر الدائرة R و $v = wR$ والقوة F_N تكون

$$F_N = m\frac{v^2}{R} = mw^2R \qquad (3.22)$$

في الحركة الدائرية المنتظمة يكون $a_T = 0$ و $\vec{a} = \vec{w}\times\vec{v}$ يمثل a_N بالمقدار والأتجاه القوة المركزية تمثل بالمعادلة:

$$\vec{F} = m\vec{a} = m(\vec{w}\times\vec{v}) = \vec{w}\times(m\vec{v})$$

أو إن

$$\vec{F} = \vec{w}\times\vec{p} \qquad (3.23)$$

حيث $\vec{p}$ هو الزخم الخطي للجسيم.

عندما تكون الكتلة متغيرة يجب إستخدام قانون نيوتن الثاني بصيغته العامة $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ولما كان $\vec{p}$ موازياً لمتجه السرعة $\vec{v}$ فهو مماساً للمسار ويمكن تمثيله على النحو التالي

$$\vec{p} = \hat{e}_T p$$

حيث $\hat{e}_T$ هي وحدة المتجه المماس للمنحني. عند تفاضل هذه العلاقة بالنسبة للزمن

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \hat{e}_T \frac{dp}{dt} + \frac{d\hat{e}_T}{dt} p$$

اي ان

$$\vec{F} = \hat{e}_T \frac{dp}{dt} + \hat{e}_N \frac{vp}{\rho} \qquad (3.24)$$

حيث إستخدمنا العلاقة $\frac{d\hat{e}_T}{dt} = \hat{e}_N \frac{vp}{\rho}$. من العلاقة (3.24)

$$F_T = \frac{dp}{dt} \qquad (3.25)$$

$$F_N = \frac{vp}{\rho} \qquad (3.26)$$

<u>الزخم الزاوي Angular momentum</u>

يعرف الزخم الزاوي $\vec{L}$ حول النقطة 0 لجسيم كتلته m وسرعته $\vec{v}$ بالمعادلة

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} \qquad (3.27)$$

أو

$$\vec{L} = m\vec{r} \times \vec{v} \qquad (3.28)$$

ويظهر من التعريف إن الزخم الزاوي كمية إتجاهية تتجه عمودياً على المستوي الذي يعينه $\vec{r}$ و $\vec{v}$ وهو يتغير بالمقدار والإتجاه أثناء الحركة. إذا كانت حركة الجسيم في مستوي فاتجاه الزخم الزاوي يبقى ثابت باتجاه العمود على المستوي الذي تجري فيه الحركة. الحركة الدائرية حالة خاصة للحركة في مستو يكون $\vec{r}$ عمودي على $\vec{v}$ و $v = wr$. يكون $\vec{L}$ هو:

$$L = mrv = mr^2 w \qquad (3.29)$$

ويتجه بأتجاه $\vec{w}$ لذا

$$\vec{L} = mr^2 \vec{w} \qquad (3.30)$$

إذا لم تكن الحركة دائرية تحلل السرعة إلى مركبتين شعاعية(قطرية) radial v_r باتجاه r ومستعرضة (عمودية) transverse :

$$\vec{v} = v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta$$

ويكتب الزخم الزاوي كما في الشكل

$$\vec{L} = m\vec{r} \times (v_r\hat{e}_r + v_\theta\hat{e}_\theta)$$

ولما كان $\vec{r}$ عموديا على v_θ يكون مقدار $\vec{L}$ هو

$$L = mrv_\theta$$

لكن $v_\theta = r\dfrac{d\theta}{dt}$ يكون

$$L = mr^2\frac{d\theta}{dt} \qquad (3.31)$$

وهي تطابق المعادلة (3.29) لان $w = \dfrac{d\theta}{dt}$ في حالة الحركة الدائرية

الا ان r ليست ثابتة في الحالة العامة

يمكن كتابة الزخم الزاوي للجسيم كما يلي

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x & y & z \\ p_x & p_y & p_z \end{vmatrix}$$

وبدلالة مركباته

$$\left.\begin{aligned} L_x &= yp_z - zp_y \\ L_y &= zp_x - xp_z \\ L_z &= xp_y - yp_x \end{aligned}\right\} \qquad (3.32)$$

لحركة في مستوي xy يكون z=0، $p_z = 0$ لذا يكون $L_x = L_y = 0$ وتبقى مركبة L_z فقط. أي إن الزخم الزاوي الكلي يكون عمودياً على المستوي.

باخذ مشتقة (3.27) بالنسبة للزمن

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (3.33)$$

ولما كان $v = \frac{dr}{dt}$, $\vec{p} = m\vec{v}$ يصبح

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{v} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{v} \times m\vec{v} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad (3.34)$$

الطرف الأيسر هو العزم

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \qquad (3.34)$$

تصح هذه المعادلة عندما تكون $\vec{L}, \vec{M}$ مقاستين بالنسبة لنفس النقطة 0.

وتنص على إن معدل تغير الزخم الزاوي لجسيم حول النقطة 0 يساوي عزم القوة حول تلك النقطة. ويتضح إن التغير الزمني في الزخم الزاوي يساوي العزم المسلط.

مثال : أطلقت قذيفة من قمة عمارة أحسب سرعة القذيفة والعزم حول نقطة إنطلاقها.

السرعة الأفقية $v_x = v_0$ المسافة الأفقية $x = v_0 t$ ، السرعة الشاقولية $v_y = -gt$ المسافة الشاقولية $y = -\frac{1}{2}gt^2$

.

السرعة الكلية للقذيفة

$$v = \sqrt{v_0^2 + (gt)^2}$$

$$L_z = xp_y - yp_x = m(xv_y - yv_x)$$

$$L_z = m[(v_0 t)(-gt) - (-\frac{1}{2}gt^2)v_0] = m(-v_0 gt^2 + \frac{1}{2}v_0 gt^2)$$

$$L_z = -\frac{1}{2}mv_0 gt^2$$

<u>قصور قوانين نيوتن</u>

بِسْمِ ٱللَّهِ ٱلرَّحْمَٰنِ ٱلرَّحِيمِ

الفصل الرابع : الشغل والطاقة

من قانون نيوتن الثاني

$$\vec{F} = m\vec{a} \qquad (4.1)$$

فإذا كانت القوة ثابتة فالتعجيل ثابت أيضاً. لكن عندما تكون القوة متغيرة نحتاج للتكامل لحل المسألة.

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = \frac{d\vec{p}}{dt} \qquad (4.2)$$

عندما تكون القوة معرفة كدالة للزمن يمكننا إجراء التكامل لنحصل على

$$\int_{p_0}^{p} d\vec{p} = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt \qquad (4.3)$$

أي

$$\vec{p} - \vec{p}_0 = \int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \vec{I} \qquad (4.4)$$

الكمية $\int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \vec{I}$ تدعى بالدفع impulse تنص على إن الدفع يساوي التغير بالزخم.

يمكن ان ينتج الدفع عن قوة كبيرة تؤثر خلال فترة زمنية قصيرة أو قوة صغيرة تؤثر خلال زمن طويل.

مثال: سقطت كرة كتلتها $0.1kg$ من إرتفاع $2m$ وبعد أن ضربت الأرض إرتدت إلى إرتفاع $1.8m$. جد الدفع الذي إكتسبته الكرة من فعل الجاذبية خلال سقوطها والدفع الذي إكتسبته من ضربها الأرض.

الحل:

سرعة الكره عند وصول الأرض

$$v_1 = \sqrt{2gh_1} = \sqrt{2\times 9.8\times 2} = 6.26\, m.\sec^{-1}$$

ولما كانت متجهه للأسفل

$$\vec{v}_1 = -6.26\,\hat{j}\ \ m.\sec^{-1}$$

الزخم الأبتدائي صفر. تغير الزخم الكلي خلال السقوط

$$m\vec{v}_1 - 0 = -0.626\,\hat{j}\, kg.m.\sec^{-1}$$

وهو الدفع الناشيء عن الجاذبية الأرضية. ممكن حساب هذا الدفع مباشرةً من العلاقة

$$\int_{t_0}^{t} \vec{F}dt = \vec{I}$$

في هذه الحالة $t_0 = 0,\ \ t = \dfrac{v_1}{g} = 0.6395$

$$\vec{F} = m\vec{g} = -0.1\times 9.8\,\hat{j} = -0.98\,\hat{j}$$

فالدفع الناتج عن الجاذبية

$$I = -0.626\,\hat{j}\, kg.m.\sec^{-1}$$

عندما تضرب الكرة الأرض سرعة إرتدادها

$$v_2 = \sqrt{2gh_2} = \sqrt{2\times 9.8\times 1.8} = 5.94\, m.\sec^{-1}$$

$$\vec{v}_2 = 5.94\,\hat{j}\ \ m.\sec^{-1}$$

التغير في الزخم

$$\vec{p}_2 - \vec{p}_1 = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = 1.22\,\hat{j}\, kg.m.\sec^{-1}$$

والذي يساوي الدفع.

الشغل Work

لنفرض إن جسيماً قد تحرك من A إلى A' على المنحنى C بتاثير القوة $\vec{F}$ كما في الشكل. فإذا قطع الأزاحة $\overline{AA'} = d\vec{r}$ في فترة زمنية قصيرة dt فالشغل الذ تنجزه القوة $\vec{F}$ خلال الأزاحة يعرف بالشكل

$$dW = \vec{F}.d\vec{r} \qquad (4.5)$$

أو

$$dW = Fds\cos\theta \qquad (4.6)$$

حيث ds هو مقدار $d\vec{r}$ وتمثل مقدار المسافة التي تحركها الجسيم و θ هي الزاوية بين أتجاه القوة والأزاحة. $F_T = F\cos\theta$ مركبة القوة على طول مماس المسار.

$$dW = F\cos\theta ds = F_T ds \qquad (4.7)$$

عندما يكون إتجاه القوة عمودياً على الأزاحة لا تنجز شغلا كما في الحركة الدائرية أو حركة جسم على سطح أفقي.

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B F_T ds = \int_A^B F\cos\theta ds \qquad (4.8)$$

عند حركة جسم على خط مستقيم تحت تأثير قوة ثابتة (القوة باتجاه الأزاحة)

$$W = \int_A^B F_T ds = \int_A^B Fds = F\int_A^B ds = Fs \qquad (4.9)$$

لذا يكون هنا: الشغل=القوة X المسافة.

يمكن كتابة

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (\hat{i}F_x + \hat{j}F_y + \hat{k}F_z)(\hat{i}dx + \hat{j}dy + \hat{k}dz)$$

ومنها

$$W = \int_A^B \vec{F}.d\vec{r} = \int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) \qquad (4.10)$$

القدرة

الشغل المنجز خلال وحدة الزمن.

$$P_{ave} = \frac{W}{t} \qquad (4.11)$$

القدرة الآنية

$$P = \frac{dW}{dt} \qquad (4.12)$$

من العلاقة (4.5)

$$P = \frac{\vec{F}.d\vec{r}}{dt}$$

أي إن

$$P = \vec{F}.\vec{v} \qquad (4.13)$$

وحدات الشغل والقدرة

وحدات الشغل في نظام CGS هي داين – سنتمتر وتسمى بالأرك $erg = dyne.cm$

في نظام MKS يسمى جول

$$Joule = Nt.\ m = (m.Kg/\sec^2).m = m^2.Kg/\sec^2$$

ويكون

$$Nt = 10^5\, dyne$$
$$m = 10^2\, m$$
$$J = 10^7\, erg$$

وحدات القدرة

$$Watt = J/\sec = (m^2.Kg/\sec^2).(1/\sec) = m^2.Kg/\sec^3$$

هناك وحدة أخرى هي كيلوواط - ساعة

$$KWatt.hour = (10^3 W).(3.6\times10^3 s) = 3.6\times10^6 J$$

مثال: سيارة كتلتها 1200 كغم تصعد تلا يميل عن الأفق بخمسة درجات بسرعة منتظمة قدرها 10م. ثا. إحسب الشغل الذي ينجزه المحرك في 5 دقائق ومعدل قدرته.

لنفرض زاوية ميل التل هي α وكتلة السيارة m . القوة التي يسلطها المحرك على السيارة هي F . معادلة الحركة هي

$$F - mg\sin\alpha = ma$$

ولما كانت السرعة منتظمة

ولما كانت السرعة منتظمة إذن a=0

$$F = mg\sin\alpha = 1.025\times10^3\,Nt$$

خلال 5 دقائق تقطع السيارة مسافة

$s=v.t=10x5x60=3x10^3$ m

الشغل المنجز

$$W = F.s = 1.025\times10^3\times3\times10^3 = 3.075\times10^6\,J$$

يحسب معدل القدرة

$$P_{ave} = \frac{W}{t} = \frac{3.075\times10^6\,J}{3\times10^2\,s} = 1.025\times10^4\,W$$

كذلك يحسب عن طريق

$$P = F.v = (1.025\times10^3\,Nt)(10m/\sec) = 1.025\times10^4\,W$$

الشغل الذي تنجزه قوة متغيرة

إذا كانت القوة $F(x)$ تتغير بالمقدار، فالشغل المنجز على جسيم عندما تحركه القوة من x_1 إلى x_2 هي:

$$W = \int_{x_1}^{x_2} F(x)dx \qquad (4.14)$$

مثال ذلك نابض مربوط من أحد طرفيه بجدار (مسند) شاقولي. إذا سلطت قوة تحرك نهاية النابض بسرعة منتظمة تغير طول النابض من x_0 إلى x تكون القوة التي يسلطهاا النابض

$$F = -k(x - x_0) \qquad (4.15)$$

حيث k ثابت قوة النابض. من المعادلة القوة تتجه نحو x_0 (إتجاه القوة يعاكس إتجاه الآزاحة من x_0)، والقوة تغير إشارتها عندما يمر الجسيم من نقطة الأصل x_0.

إذا أختيرت نقطة الأصل بحيث $x_0 = 0$

$$F = -kx \qquad (4.16)$$

إذا أثرت قوة قدرها F' تساوي F بالمقدار وتعاكسها بالأتجاه يكون

$$F' = kx$$

الشغل الذي تنجزه لسحب النابض من x_1 إلى x_2 هو:

$$W_{12} = \int_{x_1}^{x_2} F'(x)dx = \int_{x_1}^{x_2} kxdx = \frac{1}{2}kx_2^2 - \frac{1}{2}kx_1^2$$

إذا جعلنا $x_1 = 0$ و $x_2 = x$ نحصل على

$$W = \int_0^x kxdx = \frac{1}{2}kx^2 \qquad (4.17)$$

وهو الشغل المنجز لكي يستطيل النابض من 0 إلى x .

<u>مثال:</u> إحسب الشغل اللازم لآستطالة النابض 2 سم بسرعة منتظمة علما بان تعليق جسم كتلته 4 كغم في طرفه السائب يزيد طوله بمقدار1.5 سم.

الحل:

عند تعليق جسم كتلته 4 كغم

$$F = mg = 4 \times 9.8 = 39.2Nt$$

لأيجاد قيمة الثابت k نستخدم المعادلة $F = kx$

$$mg = kx$$
$$k = \frac{mg}{x} = \frac{39.2}{1.5 \times 10^{-2}} = 2.61 \times 10^3 Nt/m$$

لإستطالة النابض بسرعة منتظمة أي بلا تعجيل يسحب طرف النابض ببطء بانتظام. يكون الشغل

$$W = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2} \times 2.61 \times 10^3 \times (\frac{2}{100})^2$$
$$= 5.22 \times 10^{-1} J$$

مثال 2:

سلطت القوة $F = 6t\ Nt$ على جسيم 2 كغم . إذا كان الجسيم في البداية في حالة سكون جد شغل القوة خلال الثانيتين الأوليتين.

$$F = ma$$
$$a = \frac{F}{m} = \frac{6t}{2} = 3t\ m/\sec^2$$

$$a = \frac{dv}{dt} = 3t$$
$$\int_{v_0}^{v} dv = \int_0^t 3t\,dt$$
$$v - v_0 = (\frac{3t^2}{2}) = 1.5t^2$$
$$v_0 = 0$$
$$v = \frac{dx}{dt} = 1.5t^2$$
$$\int_{x_0}^{x} dx = x - x_0 = \int_0^t 1.5t^2\,dt = \frac{1.5}{3}t^3$$
$$x_0 = 0$$
$$x = \frac{1.5}{3}t^3 = 0.5t^3$$

لأيجاد الشغل

$$t = (\frac{x}{0.5})^{1/3} = 1.26x^{1/3}$$
$$F = 6t = 7.560x^{1/3}$$
$$W = \int_0^x F\,dx = \int_0^x (7.560x^{1/3})\,dx = 5.67x^{4/3}$$

ولما كان t=2

$$x = 0.5t^3 = 0.5 \times (2)^3 = 4m$$
$$W = 5.67 \times (4)^{4/3} = 36J$$

حل آخر

$$x = 0.5t^3$$
$$dx = 1.5t^2\, dt$$
$$F = 6t$$
$$W = \int F dx$$
$$= \int_0^t (6t)(1.5t^2)\, dt = \int_0^t (6\times 1.5)(t^3)\, dt = (6\times 1.5)\frac{t^4}{4}$$

عند الثانية الثانية t=2 sec

$$W = (6\times 1.5)\frac{t^4}{4} = (6\times 1.5)\frac{(2)^4}{4} = 36J$$

مثال 3: يتكون البندول البسيط من جسيم كتلته m معلق بخيط خفيف طوله ℓ . إذا أزيح الجسيم على مسار دائري نصف قطره ℓ من $\phi = 0$ إلى $\phi = \phi_0$ بتسليط قوة أفقية $\vec{F}$ عندئذ يرتفع الجسيم مسافة شاقولية قدرها h . الشد في الخيط هو T .

الحل

نفرض الحركة تحدث ببطء (لا يتعجل الجسيم)

$$F = T\sin\phi, \quad mg = T\cos\phi$$

$$T = mg\tan\phi$$

$$dW = \vec{F}.d\vec{s} = (mg\tan\phi)(\cos\phi)ds$$